

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 9: Funções Implícitas

Introdução

Algumas equações da forma $f(x, y) = 0$ podem ser reescritas na forma $y = g(x)$. Neste caso, diz-se que a equação original define $y(x)$ implicitamente e que a equação $y = g(x)$ define $y(x)$ explicitamente.

Algumas equações da forma $f(x, y) = 0$ não podem ser reescritas na forma $y = g(x)$. Para estas, não existe uma combinação algébrica de passos que possa isolar a letra y na equação. Contudo, tais equações podem ainda definir $y = g(x)$, em princípio, mesmo que seus valores precisem ser calculados numericamente. Diz-se que tais funções são definidas implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$.

Algumas equações da forma $f(x, y) = 0$ não definem $y(x)$ implicitamente, pois representam relações como um mapeamento um-para-muitos do domínio para a imagem. Contudo, nestes casos, pode-se definir partes ao longo das quais uma função $y(x)$ é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$.

Este capítulo explora exemplos de todos os três tipos de comportamentos. O caso mais simples é considerado na equação

$$2x + 3y - 7 = 0$$

onde y pode ser facilmente isolado; no caso apresentado pela equação

$$\ln(y) + \sqrt{x+y} - 5 = 0$$

y não pode ser isolado; e no caso apresentado por

$$x^2 + y^2 = 1$$

tem-se a conhecida equação do círculo unitário.

▼ Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

[discretização](#)

[discriminante](#)

[domínio](#)

[explícito](#)

[ponto flutuante](#)

[implícito](#)

[inequação](#)

[intervalo](#)

[não-negativo](#)

[parábola](#)

[equação quadrática fórmula](#)

[quadrática](#)

[número real](#)

[sequência](#)

[raiz quadrada](#)

▼ Problemas Típicos

9.1. A equação $5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$ define uma ou mais funções $y = y(x)$ [implicitamente](#).

- (a) Obter um gráfico das funções definidas implicitamente.
- (b) Expressar [explicitamente](#) cada função no gráfico traçado na parte (a)
- (c) Usar a equação dada em $x = 1$ para calcular todos os valores reais de $y(1)$.

9.2. A equação $\ln(xe^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$ define implicitamente uma função $y = y(x)$.

- (a) No [intervalo](#) $[1, 5]$, obter (usando algum tipo de ferramenta gráfica) um gráfico da função definida implicitamente.
- (b) No intervalo $[2, 5]$, substituir cada nó $x_k = 2 + \left(\frac{3}{20}\right)k$, $k = 0, 1, \dots, 20$, na equação dada e resolver numericamente, em seguida, para o $y(x_k)$ correspondente. Traçar os pontos $(x_k, y(x_k))$ e comparar o gráfico com o que foi obtido na parte (a).

▼ Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

▼ Soluções

Problema 9.1

9.1 - Solução Matemática

9.1 (a) - Solução Matemática

Obter um gráfico da função definida implicitamente pela equação

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$$

é uma tarefa desafiadora se realizada sem o auxílio de uma ferramenta gráfica apropriada. Uma forma de executá-la à mão consiste em antecipar os resultados da parte (b), obtendo-se expressões explícitas para os dois casos lá contidos. Sendo assim, escreve-se a equação na forma

$$2y^2 + (3x - 7)y + (5x^2 - 4x - 9) = 0$$

e usa-se a fórmula quadrática a fim de obter-se

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2(2)} \left(-(3x - 7) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(3x - 7)^2 - 4(2)(5x^2 - 4x - 9)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(7 - 3x \pm \sqrt{121 - 10x - 31x^2} \right) \end{aligned}$$

As raízes quadradas que aparecem em cada uma das funções acima são reais para $121 - 10x - 31x^2 > 0$. Aplicando-se novamente a fórmula quadrática e esboçando-se a parábola representada no lado esquerdo desta inequação, descobre-se que o domínio para cada uma destas duas partes da função implícita é

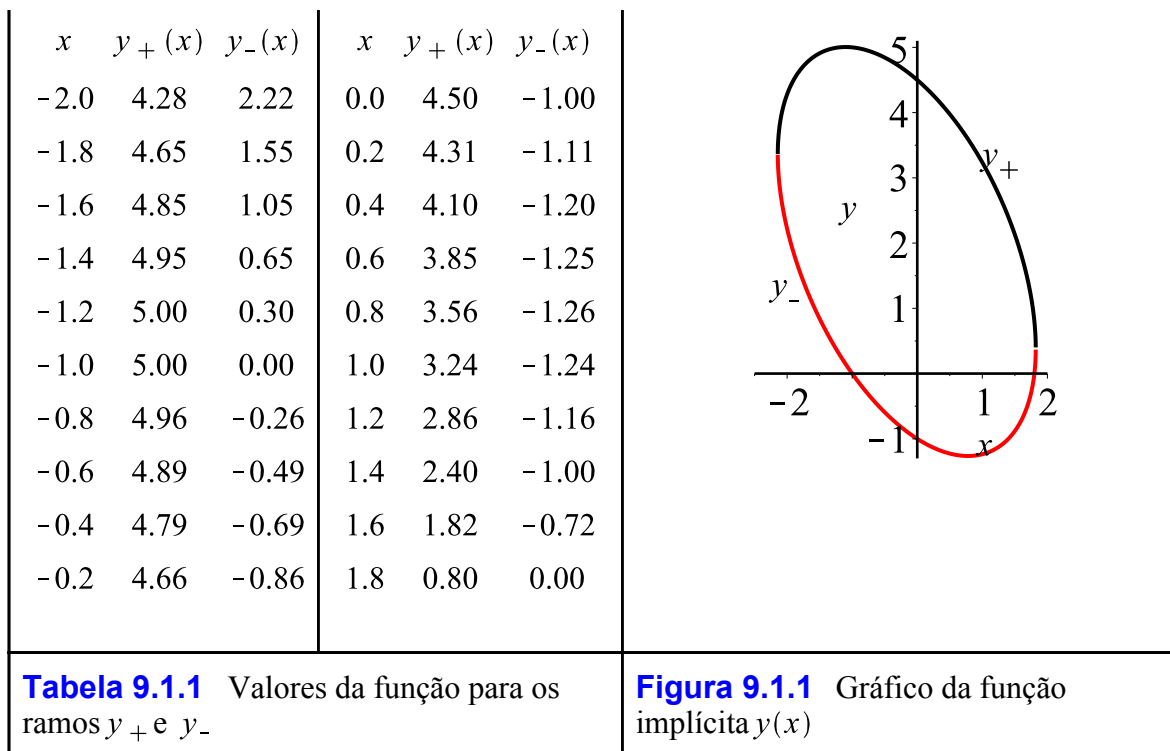
$$-\frac{5 + 8\sqrt{59}}{31} \leq x \leq \frac{-5 + 8\sqrt{59}}{31}$$

ou, aproximadamente,

$$-2.14 \leq x \leq 1.82$$

Então, dos valores da função listados na Tabela 9.1.1, use uma folha de papel para desenhar um gráfico como aquele na Figura 9.1.1.

--	--	--



9.1 (b) - Solução Matemática

Na Parte (a), foi necessário antecipar a Parte (b), onde os dois casos contidos implicitamente na equação

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$$

foram obtidos explicitamente. Recordemos que, pelo uso da fórmula quadrática aplicada a

$$2y^2 + (3x - 7)y + (5x^2 - 4x - 9) = 0$$

os ramos y_+ e y_- foram determinados a ser

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2(2)} \left(-(3x - 7) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(3x - 7)^2 - 4(2)(5x^2 - 4x - 9)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(7 - 3x \pm \sqrt{121 - 10x - 31x^2} \right) \end{aligned}$$

9.1 (c) - Solução Matemática

Se a substituição $x = 1$ é feita na equação

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$$

obtem-se a equação

$$2y^2 - 4y - 8 = 0$$

Esta equação determina os dois valores de y que correspondem a $x = 1$. Obviamente, esta equação pode ser resolvida pela fórmula quadrática, resultando

$$\begin{aligned}y_{\pm} &= \frac{1}{2(2)} \left(-(-4) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-8)} \right) \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{80}}{4} \\ &= 1 \pm \sqrt{5} \\ &= \begin{cases} 3.236067977 \\ -1.236067977 \end{cases}\end{aligned}$$

▼ 9.1 - Solução via Maplet

▼ 9.1 (a) - Solução via Maplet

Um gráfico das funções implícitas definidas pela equação

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$$

pode ser obtido com o [Tutorial Funções Implícitas](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 9.1.2.

Para o gráfico, inserir simplesmente a equação definida e clicar sobre o botão **Gráfico**. Usar o botão **Opções de Gráficos** quando necessário.

Para iniciar o **Tutorial Funções Implícitas**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Implícitas](#).

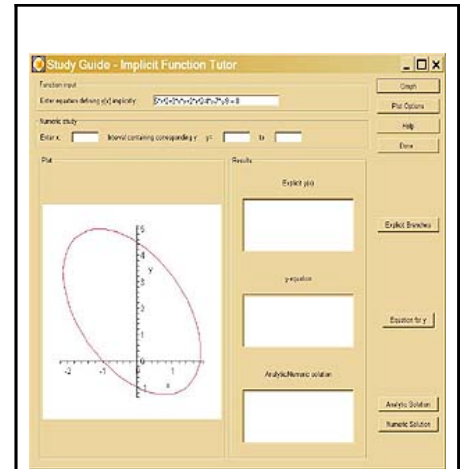


Figura 9.1.2 Imagem do Tutorial Funções Implícitas

▼ 9.1 (b) - Solução via Maplet

As regras explícitas para as funções definidas implicitamente pela equação

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$$

podem ser obtidas com o [Tutorial Funções Implícitas](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 9.1.2.

Após inserir a equação definida, deve-se clicar sobre o botão **Explicitar Ramos**. As expressões resultantes são

$$y_{\pm} = \frac{1}{4} \left(7 - 3x \pm \sqrt{121 - 10x - 31x^2} \right)$$

Para iniciar o **Tutorial Funções Implícitas**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Implícitas](#).

9.1 (c) - Solução via Maplet

Para usar a equação dada para calcular-se todos os valores reais de $y(1)$, novamente usa-se o [Tutorial Funções Implícitas](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 9.1.3.

Na seção *Estudo numérico*, deve-se inserir 1 como o valor de x e, para o *Intervalo contendo y correspondente*, deve-se inserir $y = -2$ a 5, como sugere o gráfico.

Deve-se clicar sobre o botão **Equação para y** para que se possa visualizar a equação que resulta da substituição de $x = 1$ na equação original.

Deve-se clicar no botão **Solução Analítica** a fim de obter-se os dois valores $y = 1 + \sqrt{5}$ ou, ainda, deve-se clicar no botão **Solução Numérica** para obter-se os valores de y na forma **ponto flutuante** (decimal).

Para iniciar o **Tutorial Funções Implícitas**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Implícitas](#).

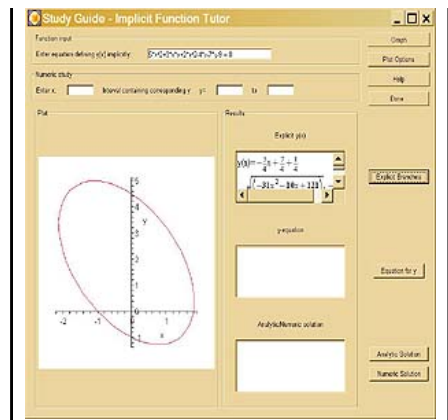


Figura 9.1.2 Imagem do Tutorial Funções Implícitas

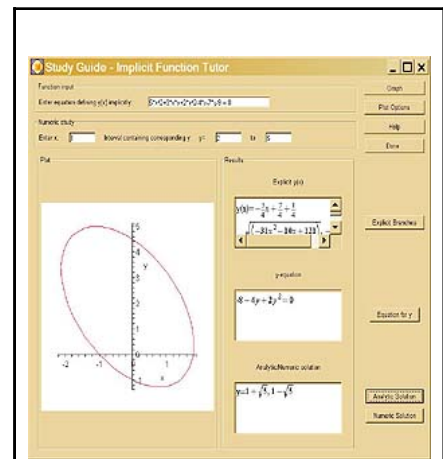


Figura 9.1.3 Imagem do Tutorial Funções Implícitas

▼ 9.1 - Solução Interativa

▼ 9.1 (a) - Solução Interativa

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Digite (ou Control-arraste) a equação.• Menu de Contexto: Gráficos>Gráficos Implícitos 2-D>x, y | |
|---|--|

▼ 9.1 (b) - Solução Interativa

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Digite (ou Control-arraste) a equação.• Menu de Contexto: Resolva>Resolva para Variável>y | |
|---|--|

▼ 9.1 (c) - Solução Interativa

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Digite (ou Control-arraste) a equação. Pressione a tecla Enter.• Menu de Contexto: Avalie em um Ponto>$x = 1$• Menu de Contexto: Resolva | |
|--|--|

▼ 9.1 - Solução via Comandos do Maple

▼ 9.1 (a) - Solução via Comandos do Maple

A função definida implicitamente pela equação

> $q := 5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$

pode ser traçada usando-se o comando implicitplot do Maple, encontrado no pacote *plots*. Com isso, obtém-se a Figura 9.1.4.

> <code>implicitplot(q, x=-3..2, y=-2..5, scaling=constrained)</code>

Figura 9.1.4 Gráfico da função definida implicitamente por $5x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 7y - 9 = 0$

▼ 9.1 (b) - Solução via Comandos do Maple

A equação

> q

pode ser resolvida explicitamente para $y = y(x)$. O comando solve do Maple resulta

```
> Y := solve(q, y)
```

Portanto, há dois ramos, que chamaremos por

```
> y_+ = Y[1];  
    y_- = Y[2]
```

Estes dois ramos explícitos da função definida implicitamente são traçados na Figura 9.1.5, onde y_+ aparece em preto, e y_- aparece em vermelho.

```
> plot( [ Y], x=-2.2..2, color = [black, red], numpoints = 2000,  
        scaling = constrained, legend = [ typeset(y_+ ),  
        typeset(y_-) ] )
```

Figura 9.1.5 Gráfico dos ramos y_+ (preto) e y_- (vermelho)

A álgebra por meio da qual estes dois casos explícitos são extraídos da equação

```
> q
```

não é mais do que a aplicação da fórmula quadrática. A variável na equação quadrática é y , enquanto todos os x 's são tratados como constantes. Sendo assim, a equação é escrita como

$$A y^2 + B y + C = 0$$

onde A , B e C são, respectivamente

```
> A := coeff(lhs(q), y, 2);  
    B := coeff(lhs(q), y, 1);  
    C := coeff(lhs(q), y, 0)
```

A fórmula quadrática resulta nas duas soluções para y

```
> ( -B + sqrt(B^2 - 4 A C) ) / 2 / A;  
    ( -B - sqrt(B^2 - 4 A C) ) / 2 / A
```

coincidindo com a solução anteriormente obtida pelo Maple.

O discriminante desta equação quadrática na variável y é

```
> simplify(B^2 - 4 A C)
```

que também pode ser obtido pelo Maple através do comando [discrim](#), como mostramos a seguir

```
> d := discrim(lhs(q), y)
```

O discriminante é [não-negativo](#) para x no intervalo

```
> r := solve(d ≥ 0, {x})
```

ou, na forma de [ponto flutuante](#),

```
> evalf(r)
```

Estes cálculos são consistentes com a Figura 9.1.5.

9.1 (c) - Solução via Comandos do Maple

Para o cálculo do(s) valor(es) de $y(1)$, deve-se substituir $x = 1$ na equação dada, isto é, em

```
> q
```

obtendo-se

```
> q1 := eval(q, x = 1)
```

que é uma [equação quadrática](#) na variável y . A solução pode ser obtida com a [fórmula quadrática](#) ou por meio do comando [solve](#) do Maple. Em ambos os casos, a solução será

```
> solve(q1, y)
```

um resultado consistente com a avaliação dos ramos

```
> y[1] = Y[1];  
y[2] = Y[2]
```

em $x = 1$. Na verdade, encontramos

```
> simplify(eval(Y[1], x = 1));  
simplify(eval(Y[2], x = 1))
```

▼ Problema 9.2

9.2 - Solução Matemática

9.2 (a) - Solução Matemática

A Figura 9.2.1 contém um gráfico gerado pelo Maple da função definida implicitamente pela equação

$$\ln(x e^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$$

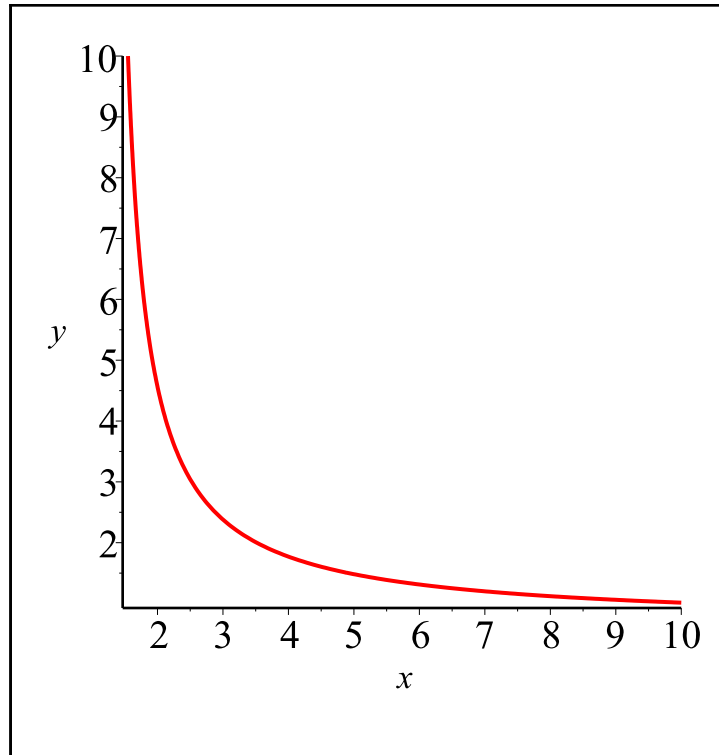


Figura 9.2.1 Gráfico de $y(x)$ definido implicitamente pela equação $\ln(x e^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$

9.2 (b) - Solução Matemática

Em um dos nós $x_k = 2 + \left(\frac{3}{20}\right)k$, $k = 0, 1, \dots, 20$, a equação

$$\ln(x e^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$$

se torna uma das entradas na Tabela 9.2.1.

k	Equação	k	Equação
0	$\ln(2) - 4y + \sqrt{2+y} + 15 = 0$	11	$\ln\left(\frac{73}{20}\right) + \frac{399}{20} - \frac{49}{4}y$

			$+\frac{1}{10}\sqrt{365+100y}=0$
1	$\ln\left(\frac{43}{20}\right)+\frac{309}{20}-\frac{19}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{215+100y}=0$	12	$\ln\left(\frac{19}{5}\right)-13y$ $+\frac{1}{5}\sqrt{95+25y}+\frac{102}{5}$ $=0$
2	$\ln\left(\frac{23}{10}\right)-\frac{11}{2}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{230+100y}$ $+\frac{159}{10}=0$	13	$\ln\left(\frac{79}{20}\right)+\frac{417}{20}-\frac{55}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{395+100y}=0$
3	$\ln\left(\frac{49}{20}\right)+\frac{327}{20}-\frac{25}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{245+100y}=0$	14	$\ln\left(\frac{41}{10}\right)-\frac{29}{2}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{410+100y}$ $+\frac{213}{10}=0$
4	$\ln\left(\frac{13}{5}\right)-7y$ $+\frac{1}{5}\sqrt{65+25y}+\frac{84}{5}$ $=0$	15	$\ln\left(\frac{17}{4}\right)+\frac{87}{4}-\frac{61}{4}y$ $+\frac{1}{2}\sqrt{17+4y}=0$
5	$\ln\left(\frac{11}{4}\right)+\frac{69}{4}-\frac{31}{4}y$ $+\frac{1}{2}\sqrt{11+4y}=0$	16	$\ln\left(\frac{22}{5}\right)+\frac{111}{5}-16y$ $+\frac{1}{5}\sqrt{110+25y}=0$
6	$\ln\left(\frac{29}{10}\right)-\frac{17}{2}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{290+100y}$ $+\frac{177}{10}=0$	17	$\ln\left(\frac{91}{20}\right)+\frac{453}{20}-\frac{67}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{455+100y}=0$
7	$\ln\left(\frac{61}{20}\right)+\frac{363}{20}-\frac{37}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{305+100y}=0$	18	$\ln\left(\frac{47}{10}\right)-\frac{35}{2}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{470+100y}$ $+\frac{231}{10}=0$
8	$\ln\left(\frac{16}{5}\right)-10y$	19	$\ln\left(\frac{97}{20}\right)+\frac{471}{20}-\frac{73}{4}y$

	$+\frac{1}{5}\sqrt{80+25y}+\frac{93}{5}=0$		$+\frac{1}{10}\sqrt{485+100y}=0$
9	$\ln\left(\frac{67}{20}\right)+\frac{381}{20}-\frac{43}{4}y$ $+\frac{1}{10}\sqrt{335+100y}=0$	20	$\ln(5)-19y+\sqrt{5+y}+24=0$
10	$\ln\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{23}{2}y$ $+\frac{1}{2}\sqrt{14+4y}+\frac{39}{2}=0$		
Tabela 9.2.1 A equação $\ln(xe^{-y})+\sqrt{x+y}-5xy+3x+7y+9=0$ nos nodos $x_k=2+\left(\frac{3}{20}\right)k, k=0, 1, \dots, 20$			

As soluções das equações na Tabela 9.2.1 aparecem na Tabela 9.2.2. A Figura 9.2.2 contém um gráfico dos pontos de dados na Tabela 9.2.2.

x	$y(x)$	x	$y(x)$	x	$y(x)$
2.00	4.56	3.05	2.33	4.10	1.73
2.15	3.93	3.20	2.21	4.25	1.68
2.30	3.48	3.35	2.10	4.40	1.63
2.45	3.14	3.50	2.01	4.55	1.59
2.60	2.87	3.65	1.93	4.70	1.55
2.75	2.66	3.80	1.85	4.85	1.52
2.90	2.48	3.95	1.79	5.00	1.48

Tabela 9.2.2 Soluções das equações na Tabela 9.2.1

Figura 9.2.2 A curva da Figura 9.2.1 e os pontos da Tabela 9.2.2

9.2 - Solução via Maplet

9.2 (a) - Solução via Maplet

A função $y(x)$ definida implicitamente pela equação

$$\ln(xe^{-y})+\sqrt{x+y}-5xy+3x+7y+9=0$$

pode ser traçada no intervalo $[1, 5]$ usando-se o



[Tutorial Funções Implícitas.](#)

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 9.2.3.

Após a inserção da equação definida, deve-se usar o botão **Opções de Gráfico** a fim de se definir o intervalo.

Em seguida, deve-se clicar sobre o botão **Gráficos** para obter-se o gráfico desejado.

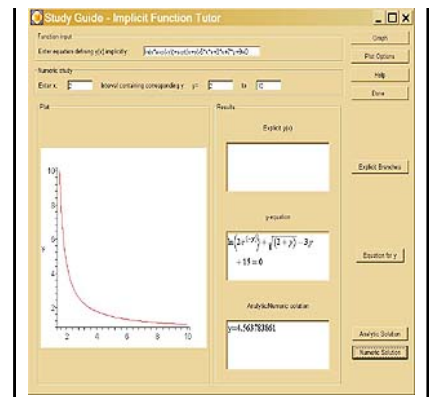


Figura 9.2.3 Imagem do Tutorial Funções Implícitas

Para iniciar o **Tutorial Funções Implícitas**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Implícitas](#).

9.2 (b) - Solução via Maplet

A função $y(x)$ definida implicitamente pela equação

$$\ln(xe^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$$

pode ser traçada ponto a ponto, no intervalo $[2, 5]$, usando-se o [Tutorial Funções Implícitas](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 9.2.4.

Para cada um dos nós

$$x_k = 2 + \left(\frac{3}{20}\right)k, k = 0, 1, \dots, 20, \text{ deve-se inserir um}$$

único valor de x e clicar no botão **Solução Numérica** a fim de obter-se o valor correspondente de y .

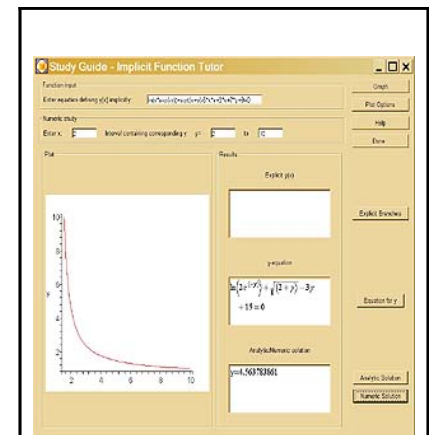


Figura 9.2.4 Imagem do Tutorial Funções Implícitas

Tal cálculo para $x = 2$ é mostrado na solução, contanto que onde a equação não-linear que define este valor de y também tenha sido obtida ao clicar-se no botão **Equação para y** .

Após selecionar-se as coordenadas de todos os 21 pontos, pode-se traçar os pontos, conectando-os com uma curva suave. Obviamente, esta é uma tarefa tediosa se realizada à mão. Para este problema, as seções Solução Iterativa e Solução via Comandos do Maple implementam estratégias mais eficientes para estes cálculos.

Para iniciar o **Tutorial Funções Implícitas**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Implícitas](#).



▼ 9.2 - Solução Interativa

▼ 9.2 (a) - Solução Interativa

• Digite (ou Control-arraste) a equação, estando certo de usar a exponencial "e" e não a letra e. • Menu de Contexto: Gráficos>Gráficos Implícitos 2-D>x, y	
---	--

▼ 9.2 (b) - Solução Interativa

Escreva o lado esquerdo da equação como uma função $f(x)$	
• Digite (ou Control-arraste) a equação, estando certo de usar a exponencial "e" e não a letra e. • Pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Lado Esquerdo • Menu de Contexto: Conversões>Operador>x • Menu de Contexto: Associe a um Nome>f	
Gere uma lista de valores de y	
• Digite $f\left(2 + \frac{3}{20}k\right) = 0$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Sequência>k>0 ..20 • Menu de Contexto: Mapeie Comando Em Mapeie o comando: fsolve Associe os argumentos: y • Menu de Contexto: Conversões>Para Lista • Menu de Contexto: Associe a um Nome>Y	
Gere uma lista correspondente de valores de x	
• Digite $2 + \frac{3}{20}k$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Sequência>k>0 ..20 • Menu de Contexto: Conversões>Para	

Lista • Menu de Contexto: Associe a um Nome > X	
Faça o gráfico dos pontos calculados	
• Digite X, Y e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos > Gráfico	
Faça o gráfico da função implícita	
• Digite (ou Control-arraste) a equação, estando certo de usar a exponencial "e" e não a letra e . • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $2 \leq x \leq 5$	
Control-arraste (ou copie/cole) o gráfico da função implícita na gráfico dos pontos computados.	

▼ 9.2 - Solução via Comandos do Maple

▼ 9.2 (a) - Solução via Comandos do Maple

A função $y(x)$ definida implicitamente pela equação

$$> q := \ln(x \exp(-y)) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$$

pode ser traçado usando-se o comando implicitplot do Maple, encontrado no pacote *plots*. Com isso, obtém-se a Figura 9.2.5.

```
> implicitplot(q, x = 1 .. 5, y = 1 .. 5)
```

Figura 9.2.5 Gráfico de $y(x)$ definida implicitamente pela equação $\ln(x e^{-y}) + \sqrt{x+y} - 5xy + 3x + 7y + 9 = 0$

▼ 9.2 (b) - Solução via Comandos do Maple

A discretização sugerida contém os nós $x_0 = 2$ e $x_{20} = 5$. No nó x_2 , a equação

$$> q$$

torna-se

$$> q0 := \text{eval}(q, x = 2)$$

Esta equação em y pode ser resolvida apenas numericamente e, para tal, utilizaremos o comando `fsolve` do Maple. O resultado é

```
> y0 := fsolve(q0, y)
```

Sendo assim, um ponto no gráfico da função definida implicitamente $y = y(x)$ é

```
> `(2, y0)
```

Na outra extremidade do intervalo $[2, 5]$, tem-se $x_{20} = 5$, e os cálculos neste nó são

```
> q20 := eval(q, x = 5)
```

e

```
> y20 := fsolve(q20, y)
```

Portanto, o ponto

```
> `(5, y20)
```

também é um ponto do gráfico da função definida implicitamente $y = y(x)$.

Um processo mais eficiente usa uma série de comandos do Maple que resulta em uma lista de pontos, a partir da qual o comando `plot` pode esboçar um gráfico. Este laço é implementado a seguir.

```
> P := NULL :  
  for k from 0 to 20 do  
    X := 2 + 3 / 20 k;  
    Y := fsolve(eval(q, x = X), y);  
    P := P, [X, Y];  
  end do:  
  P
```

O comando NULL no início dos cálculos inicia uma seqüência de pontos vazia. À medida que cada novo valor de y é calculado, o ponto (x_k, y_k) é formado e inserido na lista.

Um gráfico no qual os pontos calculados são conectados linearmente é encontrado na Figura 9.2.6.

```
> p1 := plot([P], color = red) :  
  p2 := plot([P], style = point, symbol = solidcircle, color = black) :  
  display([p1, p2], labels = [x, y])
```

Figura 9.2.6 Gráfico de $y(x)$ e os pontos discretos na Tabela 9.2.2

Exercícios - Capítulo 9

As equações dadas nos exercícios 9.1 - 9.5 definem uma ou mais funções $y = y(x)$ implicitamente. Em cada caso,

- (a) Usar uma tecnologia apropriada para obter um gráfico das funções definidas implicitamente.
- (b) Expressar explicitamente cada função no gráfico obtido na Parte (a).
- (c) Usar a equação dada em $x = 1$ para calcular todos os valores reais de $y(1)$.

9.1. $9x^2 + 10y^2 + 10x - 2y - 6 = 0$

9.2. $2x^2 - 9y^2 + 10x - 3y + 3 = 0$, com x no intervalo $[-10, 10]$.

9.3. $2x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 12y + 5 = 0$, com x no intervalo $[-15, 15]$.

9.4. $7x^2 + 5xy + 11y^2 + 9x - 3y - 7 = 0$

9.5. $5x^2 + 10xy + 11y^2 + 10x + y - 50 = 0$

